EJERCICIOS

1. Obtener el núcleo y la imagen de cada una de las aplicaciones lineales definidas e indicar si se trata de un epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. Comprobar que en cada caso se verifica la fórmula de las dimensiones para aplicaciones lineales.

$$f_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \\ x-2y \end{pmatrix}$$

$$f_2: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f_2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-z \\ z-y \end{pmatrix}$$

$$f_3: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f_3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y-3z \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_4: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ f_4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \\ 0 \\ z-t \end{pmatrix}$$

$$f_5: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f_5\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y-x \\ z-y \end{pmatrix}$$

$$f_6: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ f_6\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ x \\ t \\ y \end{pmatrix}$$

$$f_7: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f_7\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2. Las siguientes son las matrices, respecto de las bases canónicas, de la proyección ortogonal sobre el subespacio vectorial W_i indicado. Calcular el núcleo y la imagen de cada aplicación y relacionar en cada caso el resultado obtenido con los subespacios W_i y $W_i^{\perp}$.

a. $A_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ p_{(W_1)}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ W_1 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : \begin{matrix} x+y=0 \\ z+t=0 \end{matrix}\right\}$

b. $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ p_{(W_2)}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ W_2 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : x=0\right\}$

c. $A_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ p_{(W_3)}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ W_3 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x-y+z=0\right\}$

3. Dada la aplicación lineal $g_3\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por $g_3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ z \\ y \\ x \end{pmatrix}$ calcular todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ cuya imagen sea el vector $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. Dada la aplicación lineal $g_4\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g_4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \end{pmatrix}$ calcular todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ cuya imagen sea el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. Dada la aplicación lineal $g_5\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por $g_5\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z-t \\ x-y-z+t \\ y-t \\ x-z \end{pmatrix}$ calcular todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ cuya imagen esté en el subespacio $S = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.